Funkcije više promjenljivih

Doc. dr Nevena Mijajlović

Računarstvo i informacione tehnologije, PMF

Matematika 3

U nauci i praksi često se javljaju situacije u kojima postoji zavisnost izmedju nekoliko realnih veličina $a, b, c, \ldots$ pri čemu je jedna od njih potpuno odredjena vriednostima ostalih. U tom smislu dovoljno je podsjetiti se sljedećih primjera.

(a) Zapremina kvadra sa stranicama dužine a, b i c izračunava se po obrascu

$$V = abc$$

(b) Površina kvadra sa stranicama dužine a, b, c izračunava se po formuli

$$P = 2(ab + ac + bc)$$

Obije formule daju vezu izmedju četiri realne promjenljive, pri čemu su V i P zavisno promjenljive, dok su a, b i c nezavisno promjenljive. Navedeni primjeri jasno ukazuju na potrebu za proučavanjem funkcija više promjenljivih.

Funkcije dvije promjenljive

- Notacija $y = f(x)$, gdje je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, služila nam je da iskažemo da je promjenljiva y zavisna od jedne promjenljive x, tj. reći da je y funkcija od x.
- Domen ovakve funkcije f bio je skup realnih brojeva (ili neki njegov podskup).
- Mnoge veličine mogu se posmatrati u zavisnosti o više promjenljivih, te su onda one funkcije više promjenljivih.

- Naprimjer, zapremina kružnog cilindra je veličina zavsina od poluprečnika osnove cilindra r i njegove visine H, tj. $V = 2\pi rH$, pa kažemo da je V funkcija dvije promjenljive r i H.
- Izaberemo li notaciju za ovu funkciju sa f, tada je $V = f(r, H)$, pa imamo da je

$$F(r, H) = 2\pi rH, \quad (r > 0, H > 0).$$

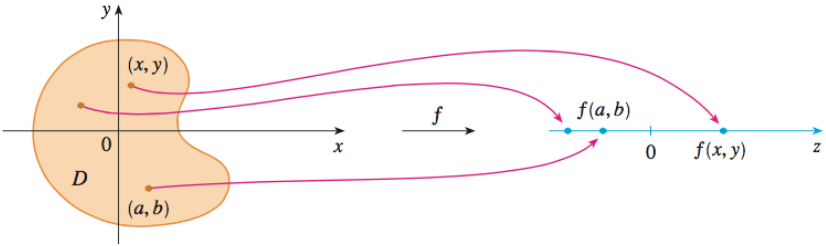
- Pri tome su ograničenja na poluprečnik osnove $r > 0$ i visinu $H > 0$ prirodni uslovi jer te veličine ne mogu biti negativne, a ni nule jer takav cilindar onda ne postoji.

Funkcija dvije promjenljive

Ako svakom paru realnih brojeva (x, y) iz skupa D po nekom zakonu ili pravilu f dodijelimo tačno jedan realan broj $f(x, y)$, kažemo da je sa f definisano preslikavanje ili funkcija sa D u $\mathbb{R}$.

- Često pišemo $z = f(x, y)$, kad želimo da eksplicitno izrazimo vrijednost funkcije f u tački (x, y).
- Promjenljive x i y su **nezavisno promjenljive** a z je **zavisno promljenjiva**.

Domen funkcije dvije promjenljive je podskup skupa $\mathbb{R}^2$, a kodomen je podskup od $\mathbb{R}$.



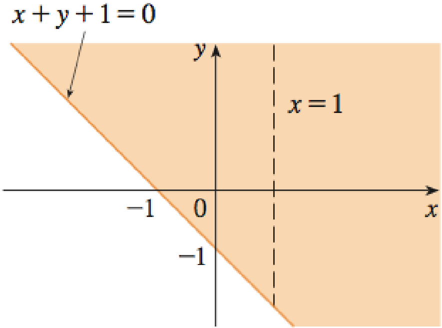
Ako je funkcija f zadata formulom i domen nije preciziran, tada je domen funkcije f skup svih parova (x, y) za koje je izraz dobro definisan realni broj.

Primjer: Odredi domen sljedećih funkcija i vrijednost $f(3,2)$.

(a) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

Izraz za f je dobro definisan kada je imenilac nije 0 i kada je potkorjena veličina nenegativna. Tada je domen funkcije f

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y+1 \geq 0, x \neq 1\}$$

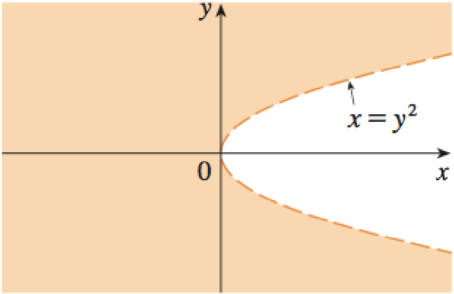


$$f(3,2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

Kako je $\ln(y^2 - x)$ definisano samo za $y^2 - x > 0$, zaključujemo da je domen funkcije f

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y^2\}$$

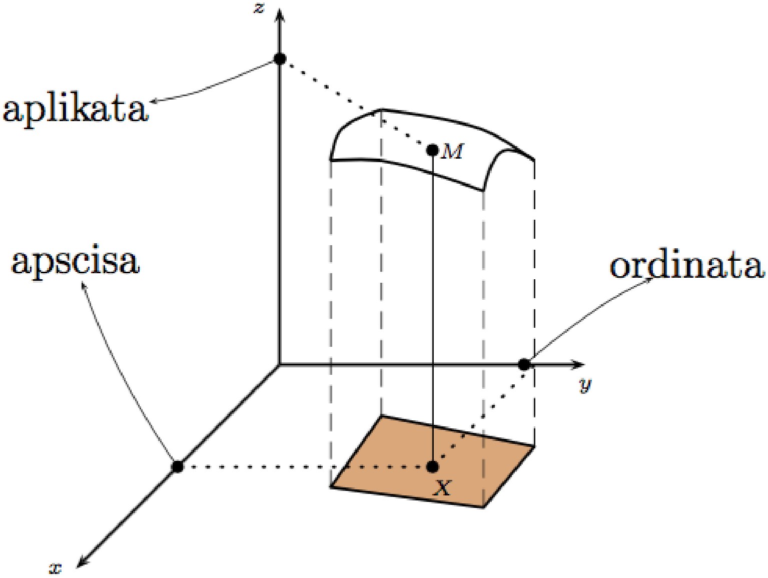


$$f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 3 \ln 1 = 0$$

Grafik funkcije

Drugi način da opišemo funkciju dvije promjenljive je preko njenog grafika.

- Kod proučavanja funkcije jedne promjenljive, $y = f(x)$, svakom smo paru (x, y) pridruživali jednu tačku $M(x, y)$ u realnoj ravni. Skup svih takvih tačaka M, činio je grafik funkcije f i on je bio predstavljen kao kriva linija u ravni.
- U slučaju kada posmatramo funkciju dvije promjenljive $z = f(x, y)$, grafik funkcije će biti izražen tačkama $M(x, y, z)$, dakle u trodimenzionalnom prostoru. Pri tome vrijedi:
  1. Svaka tačka grafika, $M(x, y, z)$, ima apscisu (po x-osi) i ordinatu (po y-osi) koje predstavljaju koordinate neke tačke $X(x, y)$ iz domena funkcije, i aplikatu (po z-osi) koja je jednaka vrijednosti funkcije u tački $X(x, y)$.
  2. Svaka tačka $M(x, y, z)$ prostora za koju tačka $X(x, y)$ pripada domenu funkcije, a aplikata z je jednaka vrijednosti funkcije u tački X, pripada grafiku funkcije.



Zaključujemo da je grafik funkcije slika njene oblasti definisanosti.
Ako je $z = f(x, y)$ definisana u oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$, njen grafik predstavlja

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Skup

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$$

nazivamo **grafik** funkcije f.

Primjer: $f(x,y) = 2x^2 + y^2$

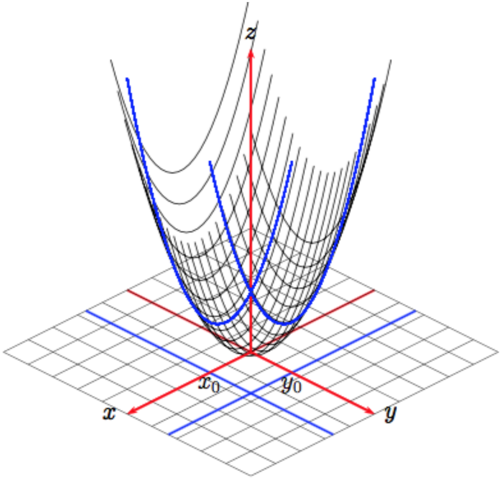
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (domen je $\mathbb{R}^2$)
Grafik funkcije f predstavlja skup uredjenih trojki $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, koje zadovoljavaju jednakost

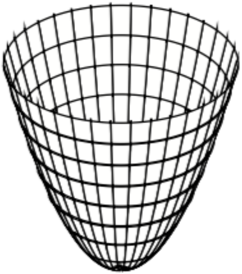
$$z = 2x^2 + y^2.$$

Da bismo predstavili grafik ove funkcije u $\mathbb{R}^3$, koristimo ideju da predstavljamo djelove tog grafika koji leže iznad mreže linija paralelnih osama u xy-ravni. Npr., za jedno fiksirano $x = x_0$, skup tačaka koje zadovoljavaju jednačinu

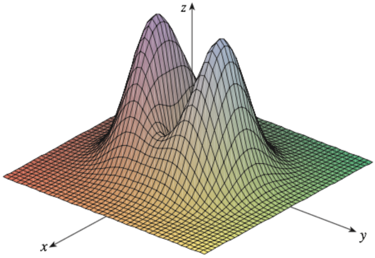
$$z = 2x_0^2 + y^2$$

predstavlja parabolu koja leži iznad linije $x = x_0$ u xy-ravni. Na isti način, ako fiksiramo $y = y_0$, skup tačaka koje zadovoljavaju jednačinu $z = 2x^2 + y_0^2$, je parabola koja leži iznad linije $y = y_0$. Ako istovremeno nacrtamo više tih parabola za razne $x = x_0$ i $y = y_0$, dobijamo mrežnu predstavu te površi (grafika) i u ovom slučaju ta površ je paraboloid.

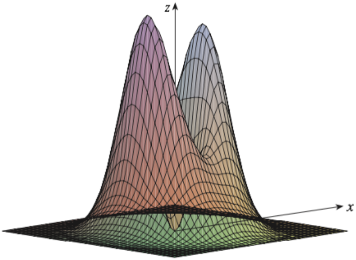

z
x_0
y_0
x
y



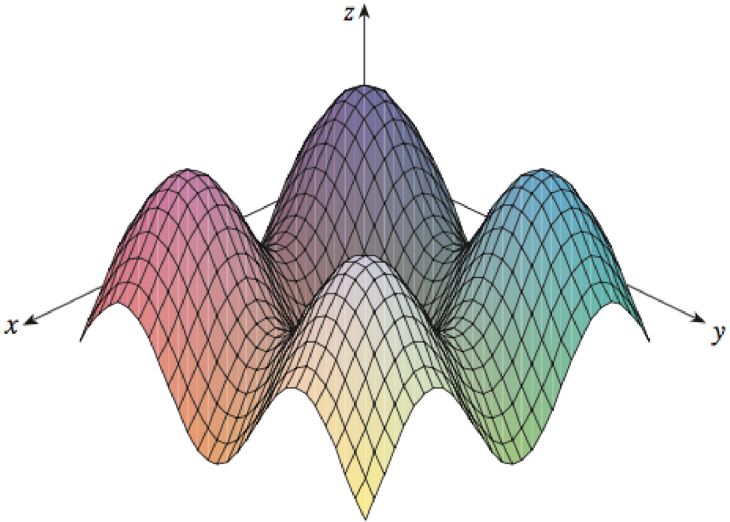
Primjeri još nekih funkcija dvije promjenljive:



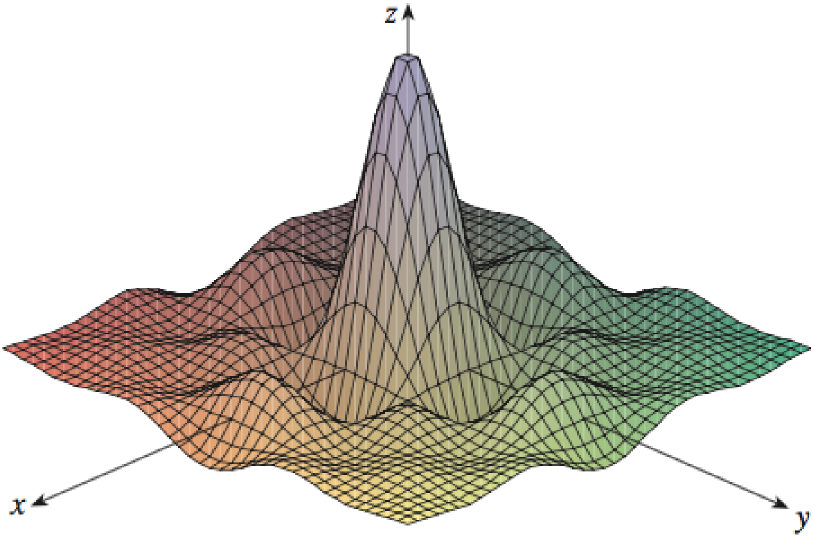
(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



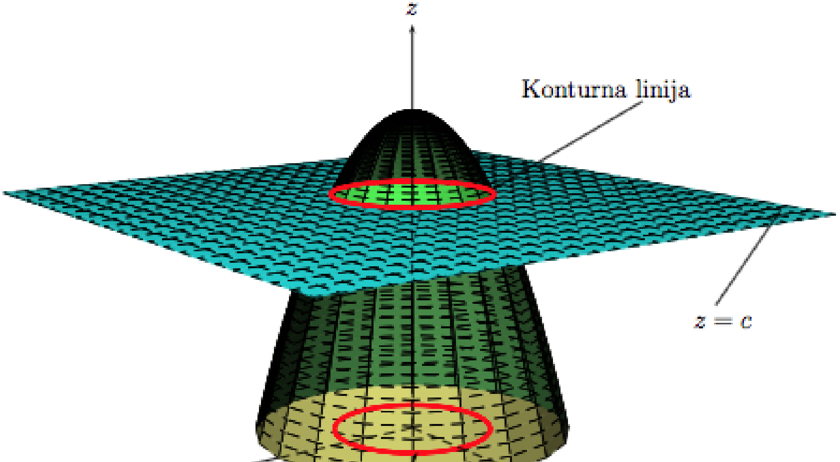
(c) $f(x, y) = \sin x + \sin y$



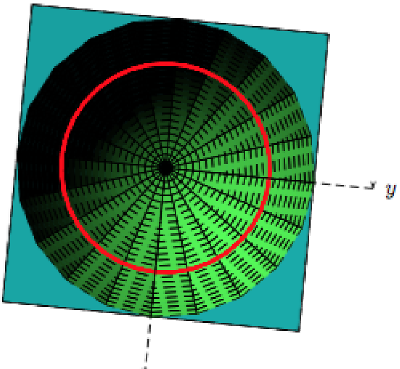
$$\text{(d) } f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$$

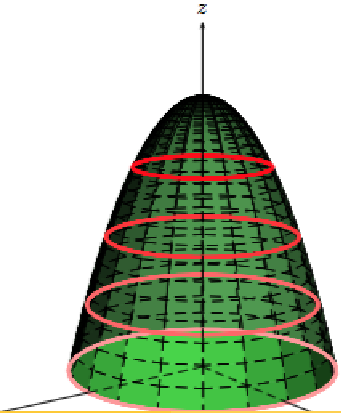
Nivo linija

Kod funkcije dvije promjenljive $z = f(x, y)$, držeći z fiksiranim, tj. stavljajući $f(x, y) = c$, geometrijski to tumačimo kao presjecanje površi $f(x, y)$ sa ravni $z = c$.



U presjeku (crvena linija) dobijamo sve tačke površi $f(x, y)$ čija je vrijednost (vrijednost zavisne promjenljive z) jednaka c i datu liniju nazivamo **konturna linija (kriva)**. Projektovanjem konturne linije u xOy ravan dobijamo liniju koju nazivamo **nivo linija (kriva)**. Ovo možemo zamisliti kao da figuru na slici gledamo iz neke "daleke" tačke na z-osi. Ponavljajući ovaj postupak za razne c, dobijamo konturnu sliku grafa.





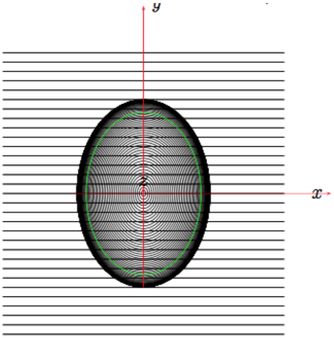
Primjer: Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadata sa $f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2$.

Za zadato $c \in \mathbb{R}$, skup tačaka koje zadovoljavaju jednakost

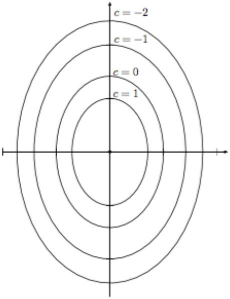
$$4 - 2x^2 - y^2 = c$$

predstavlja nivo skup funkcije f.

- Ako je $c > 4$, taj skup je prazan jer bi u tom slučaju imali da je $-2x^2 - y^2 > 0$, što očigledno nije moguće niti za jedno $(x, y) \in R^2$;
- Za $c = 4$ on se sastoji samo od jedne tačke, $(0, 0)$ (rješenje jednačine $-2x^2 - y^2 = 0$ je samo jedna tačka $(x, y) = (0, 0)$);
- Za $c < 4$ taj skup je elipsa sa centrom u koordinatnom početku, tj. za svako $c < 4$ nivo linija je predstavljena elipsom, što je prikazanao na donjoj slici za nekoliko različitih nivoa (izborom vrijednosti konstante $c = -2$, $c = -1$, $c = y_0$ i $c = 1$).

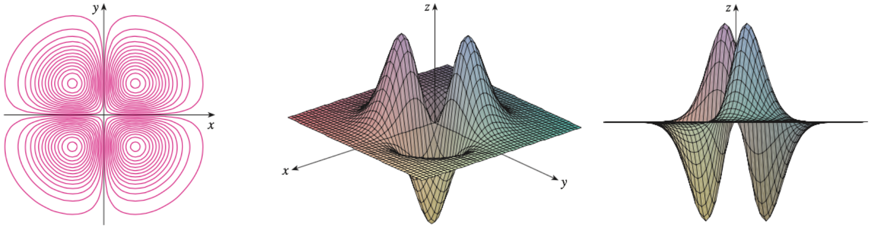


(a) Pogled sa z-ose

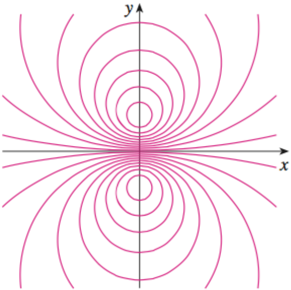


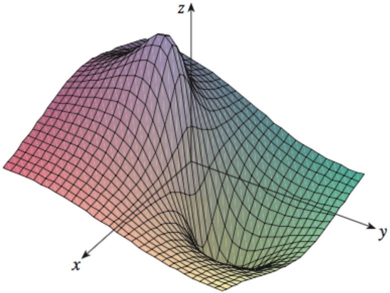
(b) Nivo linije funkcije $f(x,y)=4-2x^2-y^2$.

$$f(x,y) = -xye^{-x^2-y^2}$$



$$f(x,y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$$





Funkcije tri ili više promjenljivih

Funkcija tri promjenljive f je pravilo po kome uredjenoj trojci (x, y, z) iz domena $D \subseteq \mathbb{R}^3$ pridružujemo realan broj označen sa $f(x, y, z)$.

Primjer: Naći domen funkcije

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \sin z.$$

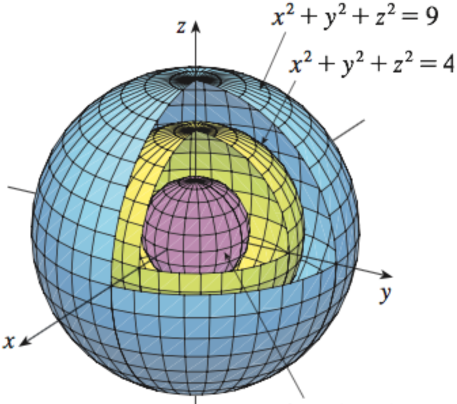
Izraz $\ln(z - y) + xy \sin z$ je definisan za $z - y > 0$, pa je domen funkcije f

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > y\}.$$

Veoma teško je vizuelizovati funkciju od tri promjeljive preko grafika, jer grafik takve funkcije se nalazi u 4-dimenzionom prostoru. Ipak, moguće je predstaviti novo površi.

Primjer: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Nivo površi su $x^2 + y^2 + z^2 = c$, gdje je $c \geq 0$. Za različito c formiramo familiju koncentričnih sfera sa poluprečnikom $\sqrt{k}$.



Pod realnom funkcijom n promjenljivih podrazumijevamo svako preslikavanje $f : D \to \mathbb{R}$, $d \subseteq \mathbb{R}^n$. Pri tome, za proizvoljno $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ pišemo

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y \text{ ili } f(X) = y.$$

Kako uredena n-torka označava tačku u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru, to ćemo često funkciju f zvati funkcija tačke. Funkcija koja svakoj tački trodimenzionalnog prostora dodjeljuje temperaturu u toj tački, primjer je takve funkcije, ili funkcija koja prikazuje bruto nacionalni dohodak neke države. U prvom slučaju domen funkcije je trodimenzionalan, dok je u drugom slučaju, zbog kompleksnosti pojma ”bruto nacionalni dohodak”, mnogo većih dimenzija (npr. stotinu).